A modular designing strategy is proposed employing the periodic tessellations used by Dutch artist M.C. Escher as source of inspiration. It consists in modifying a bidimensional shape to fit geometrically programmatic requirements of an architectural project operating as an insertion support of 3D forms.

The procedures followed by the artist are analysed, specially those using figures that tessellate the plane periodically, applying different symmetry rules.

Once the rules to generate shapes of tiles are known, we work within area and perimeter to satisfy modularity requirements and to convert the tiling as a geometric precise support for the insertion of architectural objects that follow predetermined dimensional patterns.

An example of grouping repeatable habitation units is presented.

Los teselados periódicos de M. C. Escher.
Su conversión a modulares y su utilización como soporte de la forma arquitectónica

Arq. Roberto Hugo Serrentino
Profesor Adjunto. Laboratorio de Sistemas de Diseño
Facultad de Arquitectura
Universidad Nacional de Tucumán. Argentina.
labsist@herrera.unt.edu.ar

Arq. César Roberto Gómez López
Laboratorio de Sistemas de Diseño
Facultad de Arquitectura
Universidad Nacional de Tucumán. Argentina.

Sr. Ricardo Enrique Borsetti
Laboratorio de Sistemas de Diseño
Facultad de Arquitectura y Urbanismo.
Universidad Nacional de Tucumán. Argentina.

Tomando como fuente de inspiración los teselados periódicos de la obra del artista holandés M.C.Escher se propone una estrategia de diseño modular que consiste en modificar una forma bidimensional para que se ajuste geométricamente a las necesidades programáticas de un proyecto arquitectónico y opere como soporte para la inserción de formas tridimensionales.

Se analizan los procedimientos seguidos por el artista para la manipulación de figuras que teselan periódicamente el plano aplicando diferentes reglas de simetría.

Conocidas las reglas para la generación de formas de teselas, se opera sobre su área y su perímetro para satisfacer requerimientos de modularidad y convertir las mismas en un soporte geométrico preciso para la inserción de objetos arquitectónicos que responden a patrones dimensionales predeterminados.

Se presenta un ejemplo agrupando unidades habitacionales repetibles.

Desarrollo

La palabra teselado proviene del latín "tessellae" nombre dado por los romanos a las pequeñas baldosas que usaban en pisos y paredes en la antigua Roma. Una tesela es precisamente una baldosa que cumple con la restricción de no superponerse con sus vecinas ni dejar vacíos entre ellas. Geométricamente una tesela es una región del plano de estructura laminar limitada por una curva cerrada compuesta por segmentos de línea.

Un teselado regular está compuesto por la repetición de la misma forma una y otra vez cubriendo, teóricamente, todo el plano euclideano. Si esto es posible mediante un solo tipo de tesela, el teselado se dice monohédrico. La palabra monohédrico significa que toda tesela es congruente con otra del mismo teselado por traslación, rotación o reflexión. Dicho más simplemente, todas las teselas son del mismo tamaño y forma.

Por lo tanto, si el teselado es monohédrico se dispone de una tesela prototipo a la que denominaremos prototesela. También en el caso que un conjunto de teselas sea congruente con otro conjunto de teselas del mismo teselado, conservando la propiedad de constituirse en una nueva tesela compuesta cubriendo el plano sin intersticios ni superposiciones, se dice que tal conjunto es una prototesela compuesta.

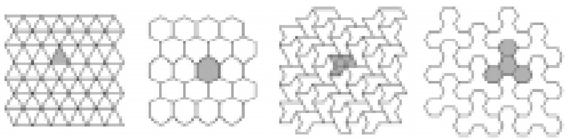

Fig.1 Prototeselas simples
Prototeselas compuestas

También es posible teselar el plano con más de una clase de tesela, y según sea el número se lo llamará di-hédrico, tri-hédrico, 4-hédrico,..., k-hédrico, siendo k un número entero positivo.

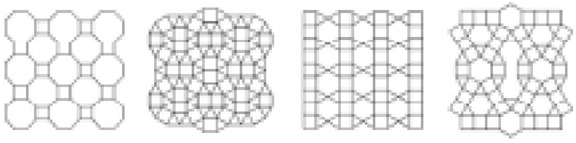

Fig.2 Teselados dihédricos. Octogonos y cuadrados. Cuadrados y triángulos equiláteros.
Teselados trihédricos. Cuadrados, hexágonos y triángulos equiláteros.

Cuando un teselado admite otras operaciones de simetría además de la simetría por identidad, se lo denomina teselado simétrico, y a las operaciones se las denomina grupo de simetrías del teselado.

Un teselado periódico es aquel cuyo grupo de simetrías contiene por lo menos dos traslaciones en direcciones no paralelas, que se representan mediante vectores ***a,b***. Entonces el grupo de simetrías contiene todas las traslaciones ***na + mb*** donde ***n*** y ***m*** son números enteros. La periodicidad con que se repiten las formas a distancias regulares suele llamarse también distribución cíclica de la superficie y su estructura se denomina latice. Comenzando por cualquier punto fijo O, el conjunto de imágenes de O bajo el conjunto de traslaciones ***na + mb*** forma una latice.

El ejemplo más familiar de latice es el conjunto de puntos del plano con coordenadas enteras como vértices de un teselado regular formado por cuadrados, se conoce con el nombre de latice unitaria cuadrada. Generalizando aun más, una latice puede estar formada por vértices de un teselado de paralelogramos.

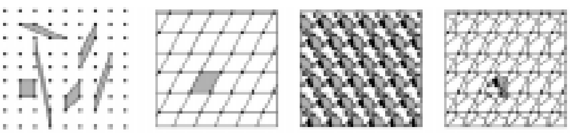

Fig. 3
(a) Una latice A de puntos del plano, y algunos paralelogramos cuyas esquinas coinciden con puntos de A. Cada uno de estos paralelogramos es una prototesela de un teselado cuyos vértices se corresponden con la latice. Todos estos paralelogramos tienen la misma área.
(b) Cualquier paralelogramo puede ser elegido como prototesela ya que los únicos puntos de la laticeque contienen son sus vértices y ningún punto de latice está en el interior ni en el borde.
(c) Un teselado periódico monohédrico con un patrón de diseño en el interior de sus teselas.
(d) El caso (c) indicando la figura que compone la tesela. Se indica uno de los posibles paralelogramos periódicos.

Por lo tanto, con cada teselado periódico está asociada una latice, y los puntos de la latice pueden ser considerados (en varias disposiciones diferentes) como los vértices de un teselado de paralelogramos. Conociendo la configuración interior de un paralelogramo formado por teselas , aristas y vértices de un cierto teselado, puede construirse el resto del teselado por repetición de esta configuración en todos los paralelogramos.

Durante toda su vida Escher convirtió este sistema de distribución en tema principal de su trabajo, incluyendo en las teselas geométricamente puras, un diseño expresado con figuras vivas reconocibles incluyendo imágenes del mundo de la fantasía. Tales teselas pueden adoptar cualquier forma poligonal, segmentada suficientes veces como para aparentar una curva si fuera necesario, lo que permite obtener configuraciones que se asemejen a todo tipo de elementos imaginables, naturales o artificiales, geométricamente complejos.

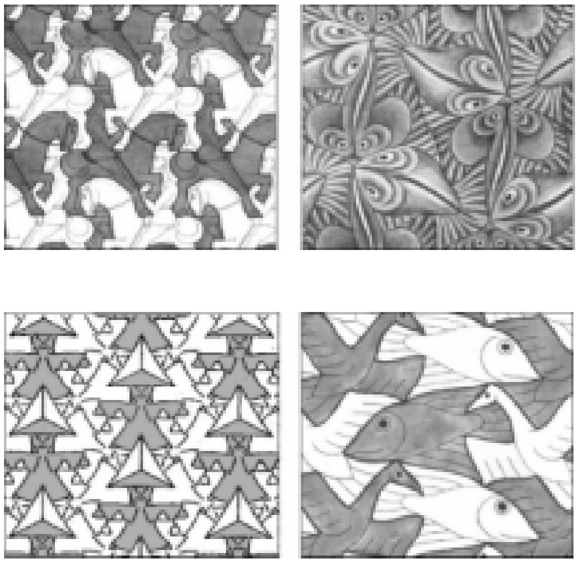

Fig.5 Otros ejemplos de Teselados de Escher con diferentes reglas de simetría.

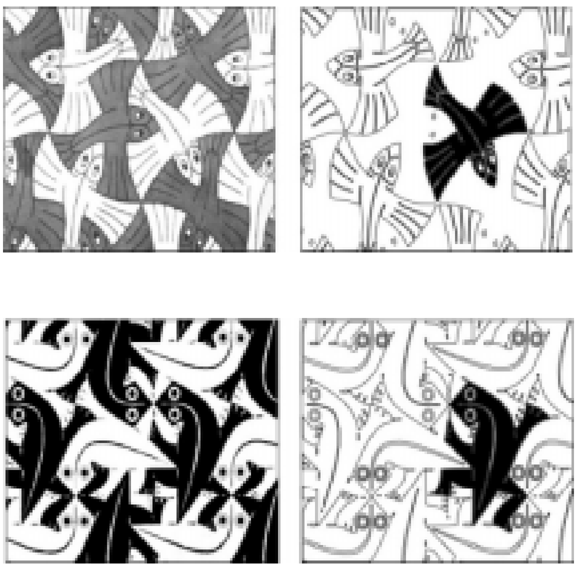

Fig.4 Ejemplos de Teselados de Escher. La imagen de la derecha enfatiza la celdilla básica de cada caso.

Existen numerosos temas de arquitectura en los que una vez definida una unidad constructiva que resuelve una situación tipo, es posible repetirla y conformar agrupamientos de unidades (proceso proyectual inductivo-sintético, que va desde las partes hacia el todo). Aulas en una escuela, viviendas de un conjunto habitacional, locales comerciales, habitaciones en un hotel, son ejemplos de esta aseveración. Si al satisfacer requerimientos de diseño logramos una forma unitaria repetible, cuya descripción geométrica es manejable modularmente tanto en su área como en su perímetro, el trabajo digital propuesto en este artículo es posible. El primer paso en la configuración de plantas arquitectónicas consiste en asignar una forma acorde a la prefiguración mental de quien la concibe, explotando alguna idea fuerza o intención de diseño. Por otra parte, casi cualquier forma plana puede ser sintetizada geométricamente por alguna clase de polígono, en general no regular, en particular cerrado. Este trabajo propone obtener formas de elementos reconocibles, naturales o artificiales que, conservando su estructuración geométrica (sin alterar su forma), tengan un área determinada y, a la vez, tengan su perímetro particionado en segmentos modulares. Para obtener estas formas se trabaja sobre el perímetro de polígonos básicos de los que podemos asegurar que teselan el plano monohédricamente y sirven como figuras directrices, modificables siguiendo reglas generadoras muy particulares para que las teselas no se superpongan ni dejen intersticios una vez modificadas.

Antes de enumerar las reglas generadoras de formas de teselas es conveniente analizar qué clases de polígonos básicos tienen la propiedad de teselar el plano monohédricamente. Aunque no es estrictamente necesario que las figuras directrices sean convexas para teselar el plano, comenzaremos nuestro análisis de tales figuras a partir de polígonos convexos de tres lados con sus diferentes formas, e iremos aumentando la cantidad de lados y sacando algunas conclusiones.

El caso más general de triángulo es aquel donde los tres lados y los tres ángulos son desiguales, es decir, un triángulo escaleno. Si reproducimos esta figura haciendo una reflexión, luego rotando 180 grados y luego trasladando como se indica, obtenemos una figura de cuatro lados paralelos dos a dos, capaz de cubrir el plano sin intersticios y sin superposiciones.

Los otros casos de triángulos están comprendidos en el caso general. Un isósceles, con dos lados iguales y uno desigual, operando de la misma manera también da como resultado un paralelogramo. Un triángulo equilátero y por lo tanto equiángulo es un caso particular de isósceles. Un triángulo rectángulo al operar de esta manera da como resultado cuadriláteros rectángulos

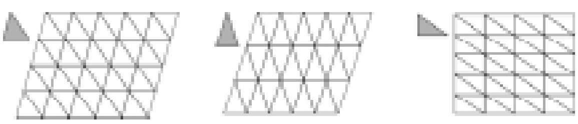

Fig.6

Si analizamos qué cuadriláteros teselan el plano, llegaremos a la conclusión que todo polígono convexo de cuatro lados lo hace, a saber: cuadrados, rombos, romboides, paralelogramos, rectángulos, trapecios, trapezoides, cuadrilátero escaleno. Algunos de ellos lo hacen por traslación simple (cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo), los otros requieren además de rotación y/o reflexión.

Un pentágono tesela el plano a condición que esté formado por la suma de un paralelogramo y de un triángulo. En otras palabras, si es posible disectar un polígono de cinco lados en un paralelogramo y cualquier clase de triángulo, tal polígono teselará el plano. Un pentágono regular no tiene la propiedad de teselar el plano

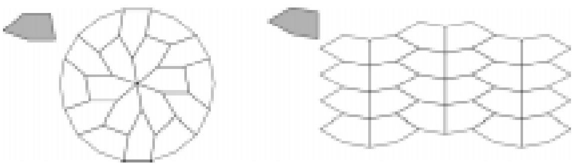

Fig.7

Existen numerosos ejemplos en la naturaleza que muestran teselados con hexágonos regulares (por ejemplo, panal de abejas, corteza de árboles y frutos, estructuras químicas, etc.). También teselan el plano aquellos hexágonos que tienen lados paralelos dos a dos que, curiosamente, son los que al disectarlos en dos porciones con una línea de partición que pase por el centro de gravedad de la figura, se obtienen dos cuadriláteros (que ya vimos que tienen la propiedad de teselar el plano). Algunos otros polígonos regulares tales como octógonos y dodecágonos tienen la propiedad de teselar la superficie plana en combinación con otros polígonos regulares, pero no pueden hacerlo monohédricamente.

Como se ha visto, los polígonos básicos directrices deben asegurar que la superficie plana sea teselada monohédricamente. A partir de allí pueden ser enunciadas las siguientes reglas generadoras de teselas con modificaciones en sus bordes, que admitan patrones de diseño en su interior, como lo hacía el artista holandés M.C. ESCHER.

1. Toda parte recortada en un lado (concavidad) se traslada paralelamente al lado opuesto paralelo (convexidad). Esta regla es aplicable a paralelogramos y a hexágonos con lados opuestos paralelos

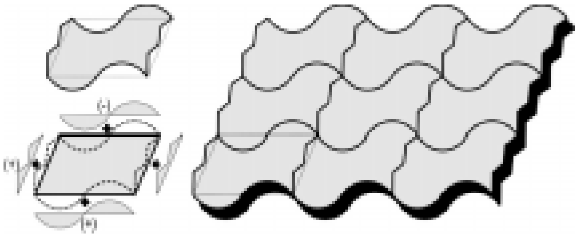

Fig.8

2. Toda parte recortada desde el punto medio de un lado hasta uno de los extremos (concavidad) se añade en el mismo lado mediante un giro de 180 grados con centro en el punto medio de dicho lado (convexidad). Esta regla es aplicable a triángulos y cuadriláteros

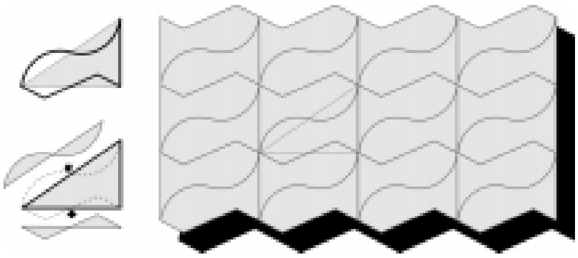

Fig.9

3. Toda parte recortada en un lado (concavidad) de figuras poligonales que tienen ángulos internos de 60 grados y de 120 grados, haciendo centro en un vértice se gira y se añade dicho recorte en otro lado (convexidad). Con una restricción: los vértices centros de giros no pueden ser consecutivos. Esta regla es aplicable a hexágonos y paralelogramos

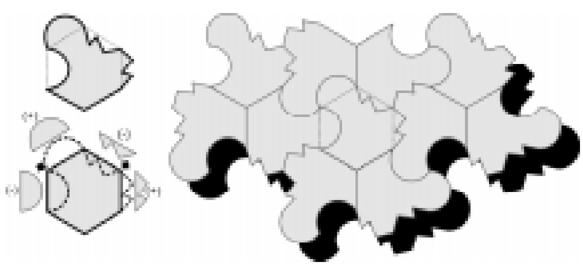

Fig.10

4. Toda parte recortada en un lado (concavidad) de figuras poligonales con algún ángulo interior de 90 grados, haciendo centro en ese vértice se gira y se añade dicho recorte en otro lado (convexidad). En caso que hubiere más de un ángulo de 90 grados, la restricción es idéntica a la de la regla anterior. Esta regla es aplicable a figuras que tengan algún ángulo interior de 90 grados, triángulos rectángulos, cuadriláteros o pentágonos

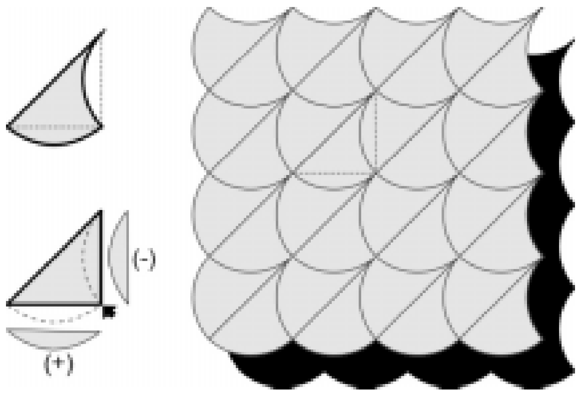

Fig.11

5. Efectuado un diseño, se lo desplaza a lo largo de una distancia predeterminada, y luego es reflejado tomando como eje de reflexión la recta mencionada.

Una vez preconcebida la forma aproximada, el procedimiento puede ser dividido en dos etapas:

1. obtención del área funcional requerida
2. partición del perímetro en segmentos modulares

La primera consiste en ubicar las coordenadas del baricentro (centro de gravedad de la figura), tomarlas como punto base para cambiar las dimensiones, y mediante una relación de proporcionalidad entre el área original y el área requerida, encontrar las coordenadas de todos los nuevos puntos perimetrales de la nueva figura ya escalada. La segunda etapa se aboca a la resolución de los polígonos, trabajando su perímetro en forma modular. Todo polígono queda definido por las coordenadas de sus vértices y la dirección de las aristas que los unen. De cada arista del perímetro se puede obtener una partición con mayor cantidad de nuevos segmentos, cada uno de ellos con una modulación lineal asignada. Aunque algunos vértices de estos nuevos segmentos modificarán su posición al efectuar la corrección de modularidad, los vértices del polígono original deben mantener sus coordenadas. El procedimiento comienza asignando un valor lineal para el módulo. Luego la distancia entre dos vértices del polígono es «forzada» a tomar un valor múltiplo del módulo asignado, respetando la forma solicitada sea un segmento de línea recta o un arco de curva circular, en cada porción del perímetro.

La mayor dificultad se presenta cuando se arriba a la última porción de cada tramo del polígono o poligonal, cuando se debe conseguir que avanzando de izquierda a derecha tanto como avanzando de derecha a izquierda, dos puntos coincidan sin alterar la modularidad.

Esto se resuelve mediante la intersección de dos circunferencias cuyos centros son el punto anterior y el punto posterior a aquel donde se quiere obtener la coincidencia modular.

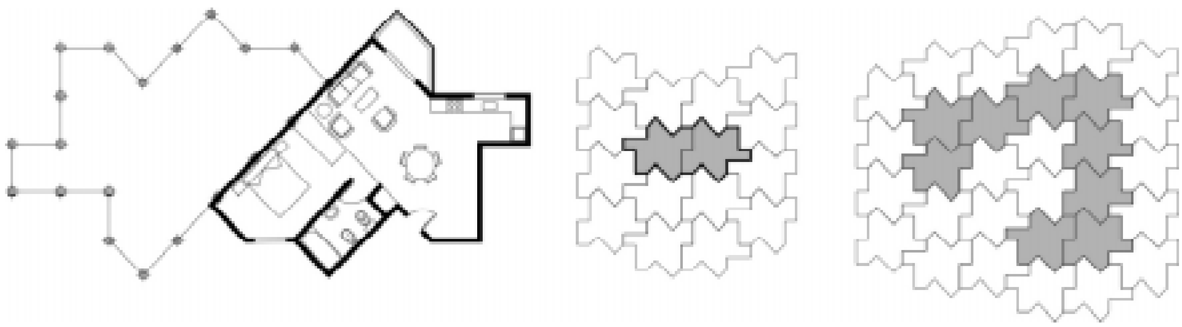

Fig. 12
(a) perímetro y área modulados en las unidades habitacionales
(b) apareamiento de unidades con el soporte geométrico indicado
(c) agrupamiento de unidades en configuraciones de mayor alcance

Trabajando de esta manera en cada lado del polígono básico, con cada segmento de la poligonal modificada, se obtiene una forma bidimensional que encierra un área determinada (requerida por programa de necesidades) y una modulación lineal congruente con los elementos arquitectónicos modulares que desee insertarse al construir la maqueta electrónica.

A modo de ejemplo se presenta aquí un proyecto de agrupamiento de unidades habitacionales pequeñas, que satisfacen una determinada área y modularidad.

Fig. 13

Fig. 14

Fig.15

Fig. 16

Conclusiones

Siendo el diseño una disciplina que necesariamente trabaja con formas, el uso de la geometría de manera racional en la búsqueda de economía es insoslayable. Una alternativa consiste en la propuesta de procedimientos que ayuden a obtener modularidad de área y de perímetro, manipulando la forma a voluntad, sin alterar los requerimientos programáticos. Operando con algoritmos digitales que toman como base geométrica teselados del plano sobre los que se puede obtener un rediseño, posibilita el agrupamiento de formas convirtiéndose en un soporte para la inserción de objetos tridimensionales que componen la maqueta electrónica.

Notas

1. B. Ernst - “El espejo mágico de M.C. Escher” Ed. Taschen - 1989

2. M.Escher - “M.C. Escher . The graphic work” Ed. Taschen - 1992

3. B. Grunbaum - “Mathematical challenges in Escher´s geometry” - 1985

4. C.Alsina y E.Trillas – “Lecciones de álgebra y geometría”- 1984

5. M. Fellows “The life and work of Escher” Ed Siena – 1995