LA FAMILIA DE NUMEROS METALICOS Y EL DISEÑO

Vera W. de Spinadel

Centro de Matemática y Diseño MAyDI

Facultad de Arquitectura, Diseño y Urbanismo - Universidad de Buenos Aires

José M. Paz 1131 - 1602 Florida - Buenos Aires - Argentina

E-mail: postmaster@caos.uba.ar vwinit@fadu.uba.ar

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es el de introducir una nueva familia de números irracionales cuadráticos. La familia se llama de Números Metálicos y su miembro más conspicuo es el Número de Oro. Otros miembros de la familia son el Número de Plata, el Número de Bronce, el Número de Cobre, el Número de Níquel, etc. Todos ellos gozan de interesantes propiedades matemáticas comunes, que son analizadas en detalle.

Los principales resultados obtenidos en este trabajo de investigación son:

1) los miembros de la familia están estrechamente relacionados con el comportamiento cuasi-periódico en la dinámica no-lineal, siendo por ello de gran ayuda en la búsqueda de caminos universales que llevan del "orden" al "caos";

2) las sucesiones basadas en los miembros de esta familia poseen muchas propiedades aditivas y son simultáneamente sucesiones geométricas, razón por la cual han sido la base de diversos sistemas de proporciones en Diseño.

Estos dos hechos indican la existencia de un promisorio puente que une los descubrimientos más recientes en tecnología con el arte, a través del análisis de relaciones fundamentales entre la Matemática y el Diseño.

1. INTRODUCCION

Vamos a presentar la nueva familia de "números metálicos". Sus integrantes tienen, entre otras características comunes, la de llevar el nombre de un metal. Así por ejemplo, el miembro más conspicuo es el famoso "Número de Oro". Luego vienen el Número de Plata, el Número de Bronce, el Número de Cobre, el número de Níquel y muchos otros más. El Número de Oro ha sido ampliamente utilizado en una gran cantidad de culturas antiguas como base de proporciones (ver primer capítulo de Referencia [1]). Con respecto a los parientes del Número de Oro, parte de estos números fueron usados por diversos físicos en sus investigaciones de punta, al tratar de sistematizar el comportamiento de sistemas dinámicos no lineales, analizando la transición de la periodicidad a la cuasi-periodicidad. Pero también Jay Kappraff [2] recurre, en particular, al Número de Plata para describir y explicar el sistema romano de proporciones, haciendo uso de una propiedad matemática que, como veremos, es común a todos los miembros de esta notable familia.

En conclusión, el hecho que los números metálicos aparezcan desde los sistemas usados en el Diseño de sus construcciones por la civilización romana antigua hasta los más recientes trabajos de caracterización de caminos universales al caos [3], los convierte en instrumentos invalorables para la búsqueda de relaciones viables cuantitativas entre la Matemática y el Arte.

2. FRACCIONES CONTINUAS

Todo número real puede ser desarrollado en fracciones continuas. ¿Qué es una fracción continua? Es una expresión del tipo

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\mathrm{O}}}}$$

que se escribe ***x =*** [$\boldsymbol{a_0, a_1, a_2, \ldots}$]. El primer coeficiente puede ser nulo (caso en que el número real está comprendido entre 0 y 1) pero el resto de los coeficientes son enteros positivos. La sucesión de coeficientes es <u>finita</u> si y solo si ***x*** es un número racional (es decir, un número de la forma ***p/q*** con ***q*** no nulo, ***p*** y ***q*** números naturales sin factores comunes). Por ejemplo, efectuando los cocientes sucesivos, es fácil verificar la siguiente descomposición en fracciones continuas de un número racional

$$\frac{18}{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3}}} = [2,1,1,3].$$

Si ***x*** es un número irracional, el desarrollo es infinito y si tomamos un número finito de términos tales como

$$\sigma_k = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\Lambda + \cfrac{1}{a_k}}}$$

obtenemos una sucesión de ***"aproximantes racionales"*** al número ***x*** que tienden a ***x*** cuando ***k*** $\to \infty$.

Algunos números irracionales tales como π y ***e*** tienen aproximantes que convergen muy rápidamente. En particular, el número π = [3,7, 15, 1, 292, ...] converge tan rápidamente que la tercer aproximación racional

$$\sigma_3 = \frac{335}{113} = 3{,}1415929\ldots$$

tiene seis cifras decimales exactas! Asombrosamente, este resultado ya era conocido por Tsu Chung Chi en la China del siglo V!. En cambio, la base de los logaritmos neperianos ***e*** = [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 2, 2, 8, 1, ...] converge más lentamente al principio, debido a la existencia de muchos 'unos' en el desarrollo. Comparativamente, los irracionales cuadráticos son de convergencia más lenta.

Al igual que con las expresiones decimales periódicas, las fracciones continuas ***"periódicas"*** se denotan con una raya sobre el período y si la descomposición es de la forma ***x*** = [$\overline{a_0, a_1, \ldots, a_n}$], decimos que la fracción continua es ***"periódica pura".*** Al respecto, el matemático francés Joseph Louis Lagrange (1736-1813) probó que un número es irracional cuadrático si y solo si su descomposición en fracciones continuas es periódica (no necesariamente periódica pura).

PROPIEDAD No. 1 DE LA FAMILIA DE NUMEROS METALICOS

Son todos irracionales cuadráticos.

En efecto, si tomamos la ecuación cuadrática

(2.1) $x^2 - x - 1 = 0$

y la resolvemos, comprobamos que su raíz positiva es el Número de Oro $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. ¿Cómo hallamos su descomposición en fracciones continuas? Simplemente, tomamos la ecuación (2.1) y la dividimos miembro a miembro por x (que suponemos un valor no nulo):

$x = 1 + \dfrac{1}{x}$. Luego reemplazamos el x del segundo miembro iterativamente por $1 + 1/x$. Así obtenemos, después de n iteraciones:

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\Lambda + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}}}}$$

. Si $n \to \infty$, resulta

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \Lambda}} = [\,\overline{1}\,]$$

, fracción continua que es periódica pura.

Análogamente, resolviendo la ecuación cuadrática $x^2 - 2x - 1 = 0$, cuya raíz positiva es el Número de Plata $\varpi_{Ag} = 1 + \sqrt{2}$, llegamos a la descomposición en fracciones continuas periódica pura

$$\varpi_{Ag} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + O}} = [\,\overline{2}\,]$$

.

Procediendo de manera análoga con la ecuación cuadrática $x^2 - 3x - 1 = 0$ obtenemos el Número de Bronce $\varpi_{Br} = \dfrac{3 + \sqrt{13}}{2} = [\,\overline{3}\,]$.

En resumen, resolviendo ecuaciones cuadráticas del tipo $x^2 - nx - 1 = 0$,con n natural, se obtienen como soluciones positivas miembros de la familia de números metálicos cuya descomposición en fracciones continuas es periódica pura, de la forma $x = [\,\overline{n}\,]$.

Si, en cambio, buscamos las soluciones positivas de ecuaciones cuadráticas del tipo

$x^2 - x - n = 0$, con n natural, obtenemos números naturales o miembros de la familia de números metálicos cuya descomposición en fracciones continuas es periódica, de la forma $[\,m, \overline{n_1, n_2, \ldots, n_n}\,]$.Este último subconjunto de números metálicos, tiene curiosas propiedades matemáticas en lo referido a la frecuencia con que aparecen los números naturales, así como a la longitud del período o a la aparición de ***"ciclos estables"*** (tal como se detalla en la Referencia [4]).

Obviamente, de todos estos números metálicos, el que posee una descomposición en fracciones continuas más lentamente convergente es el Número de Oro, pues los denominadores que van apareciendo a medida que se calcula una nueva aproximación son los más pequeños posibles - unos. Por ello podemos afirmar:

El número de Oro ϕ es el más irracional de todos los irracionales.

3. SUCESIONES DE FIBONACCI

La sucesión de Fibonacci es una sucesión de números naturales que se construye tomando cada número igual a la suma de los dos últimos precedentes. Ese tipo de sucesiones se denomina ***"sucesión de Fibonacci secundaria",*** para diferenciarlas de las sucesiones de Fibonacci ternarias, en las que cada término es una combinación lineal de los tres últimos precedentes. Comenzando con ***F(***0***)*** = 1; ***F***(1) = 1, tenemos

(3.1) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

donde

(3.2) $F(n + 2) = F(n + 1) + F(n)$.

Se puede probar (para la demostración, ver [5]) que el $\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+2)}{F(n+1)}$ existe y es un número real positivo ***x.*** Entonces, de la ecuación (3.2) resulta

$$\frac{F(n+2)}{F(n+1)} = \frac{F(n)}{F(n+1)} + 1 = \frac{1}{\frac{F(n+1)}{F(n)}} + 1.$$

Tomando límites en ambos miembros de esta ecuación y reemplazando el valor de ***x*** tenemos

$x = \frac{1}{x} + 1$***,*** o bien $x^2 - x - 1 = 0$, que no es más que la ecuación (2.1), cuya solución positiva es el Número de Oro φ. Esto implica que

(3.3) $\lim_{n\to\infty} \frac{F(n+2)}{F(n+1)} = \phi$.

Esta sucesión de Fibonacci puede generalizarse, dando origen a ***"sucesiones generalizadas de Fibonacci secundarias",*** que satisfacen relaciones del tipo

(3.4) $G(n+2) = p\,G(n) + q\,G(n+1)$

con ***p*** y ***q*** naturales. Esto nos lleva a enunciar:

PROPIEDAD No. 2 DE LA FAMILIA DE NUMEROS METALICOS

Son todos límites de sucesiones generalizadas de Fibonacci secundarias.

Así por ejemplo, la sucesión

(3.5) 1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 140, ...

donde

(3.6) $A(n+2) = 2A(n+1) + A(n)$,

da origen al Número de Plata

$$\sigma_{Ag} = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n+2)}{A(n+1)} = [\overline{2}].$$

Análogamente en los restantes casos, como es muy fácil probar.

4. PROPIEDADES ADITIVAS

Si construimos la sucesión de cocientes de términos consecutivos de la sucesión (3.1) tenemos la nueva sucesión $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \frac{89}{55}, \ldots$

que converge al Número de Oro φ**.** Formemos ahora una progresión geométrica de razón φ

$$\ldots, \frac{1}{\phi^2}, \frac{1}{\phi}, 1, \phi, \phi^2, \phi^3, \ldots$$

Esta progresión geométrica es también una sucesión de Fibonacci que cumple con la condición (3.2). En efecto : $\frac{1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi} = \frac{1+\phi}{\phi^2} = 1$.

Lo mismo sucede para todas las sucesiones generalizadas de Fibonacci secundarias que satisfacen la relación (3.4). Esto nos conduce a enunciar:

PROPIEDAD No. 3 DE LA FAMILIA DE NUMEROS METALICOS

Son los únicos números irracionales cuadráticos que generan una sucesión generalizada de Fibonacci secundaria (con propiedades aditivas) que, a la vez, es una progresión geométrica.

Esta propiedad de gozar simultáneamente de propiedades aritméticas aditivas y geométricas, confiere a los miembros de esta familia características interesantes para constituirse en bases de un sistema de proporciones geométricas en diseño.

5. SISTEMAS DE PROPORCIONES

El número de oro $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, está indisolublemente ligado a la geometría pentagonal. En efecto, si tomamos un pentágono de lado unitario, como el de la Fig. 5.1, es fácil comprobar que la diagonal del mismo vale φ. Estas divisiones áureas determinan las proporciones de la antigua máscara de Hermes (Medusa) mostrada en la Fig. 5.2. Se trata de un mármol romano tomado del original griego, Ier. siglo a.C., que se encuentra en la

Glyptothek de Munich, Alemania.

Innumerables son las referencias a la aparición del número de Oro φ en los sistemas de proporciones adoptados por civilizaciones antiguas en sus construcciones, así como su presencia en las proporciones del cuerpo humano y en Botánica.

Recientemente, Kappraff [2], en una conferencia titulada ***Nexus'96: Relaciones entre Arquitectura y Matemática,*** que se realizó en Fucecchio (provincia de Florencia) en Junio de 1996, efectuó un cuidadoso análisis de los tres sistemas de proporciones arquitectónicas presentados por P. H. Scholfield en su excelente libro [6]. Los sistemas de proporciones son:

1) el sistema de proporciones musicales usado durante el Renacimiento, desarrollado por León Battista Alberti [7];

2) el Modulor creado por el arquitecto contemporáneo Le Corbusier [8] y

3) un sistema creado por los romanos.

El Modulor de Le Corbusier está basado en el Número de Oro φ (ver Referencia [9]), mientras que el sistema romano de proporciones se funda en el Número de Plata. En efecto, para describir el sistema romano, consideremos un par de sucesiones

1 3 7 17 41 ....

(5.1) 1 2 5 12 29 70 ....

tales que

(5.2) $A(n + 2) = 2\,A(n + 1) + A(n).$

Estas sucesiones gozan de tres propiedades aditivas fundamentales. Además de la relación (5.2):

$$7 = 2.3 + 1;\ 17 = 2.7 + 3;\ ...$$

$$5 = 2.2 + 1;\ 12 = 5.2 + 1;\ ...$$

se cumple que: 2 + 5 = 7; 5 + 12 = 17; 12 + 29 = 41; ...

2 + 3 = 5; 5 + 7 = 12; 12 + 17 = 29; 29 + 41 = 70; ...

Por otra parte, los cocientes de números diagonalmente adyacentes de las sucesiones (5.1) son aproximaciones a $\sqrt{2}$

(5.3) $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \Lambda \rightarrow \sqrt{2}$.

Como la suma de un par de números de la sucesión superior no está representada en este sistema, podemos expandirlo agregando una tercer sucesión obtenida duplicando los términos de la inferior

2 4 10 24 58 ....

(5.4) 1 3 7 17 41 ....

1 2 5 12 29 70 ....

El sistema romano de proporciones arquitectónicas usa el siguiente esquema basado en el Número de Plata, equivalente al sistema (5.4)

$2\sqrt{2} \quad 2\sqrt{2}\,\sigma_{Ag} \quad 2\sqrt{2}\,\sigma_{Ag}^{2} \quad 2\sqrt{2}\,\sigma_{Ag}^{3}$ ....

(5.5) $2 \quad 2\sigma_{Ag} \quad 2\sigma_{Ag}^{2} \quad 2\sigma_{Ag}^{3}$ ....

$\sqrt{2} \quad \sqrt{2}\,\sigma_{Ag} \quad \sqrt{2}\,\sigma_{Ag}^{2} \quad \sqrt{2}\,\sigma_{Ag}^{3}$ ....

$1 \quad \sigma_{Ag} \quad \sigma_{Ag}^{2} \quad \sigma_{Ag}^{3}$ ....

Este sistema posee todas las relaciones aditivas de la sucesión (5.4). Donald y Carol Watts [10], una pareja de arquitectos norteamericanos, han estudiado cuidadosamente las ruinas de las Casas Jardín de Ostia, la ciudad-puerto del Imperio Romano y encontraron que dichas casas estaban organizadas enteramente según el sistema proporcional (5.5) o bien su aproximación entera (5.4). No son éstos los únicos ejemplos rescatados de la antiguedad ya que la arquitecta ítalo-norteamericana Kim Williams ha encontrado similares resultados en el pavimento del baptisterio de San Giovanni, Florencia, Italia [11] y en la capilla de los Médici debida al genio de Miguel Angel [12].

6. LAS ESTRUCTURAS FRACTALES DE ST. GEORGE

Alan St. George es un arquitecto retirado, de origen británico, que vive en Portugal y se dedica a crear esculturas matemáticas [13], [14]. Así, por ejemplo, St. George construye espirales tridimensionales, partiendo de los cinco sólidos platónicos. En particular, si consideramos el icosaedro de geometría pentagonal se puede construir la ***"espiral icosaédrica"*** siguiendo un recorrido que pasa por las doce aristas triangulares del icosaedro, visitando cada vértice una y solo una vez (Fig. 6.1). La construcción se realiza por medio de una sucesión de "patas" que corresponden a las 12 aristas. Cada pata está unida a la anterior y corre paralela a una arista. Pero las patas sucesivas tienen distintas longitudes: cada una de ellas tiene $\varphi^{1/12}$ = 1,040916... veces la longitud de su predecesora. La respuesta a la pregunta de por qué este extraño número es que tras haber añadido 12 lados a uno dado, el último de ellos corre paralelamente al original, habiéndose incrementado su tamaño en $(\varphi^{1/12})^{12} = \varphi$.

7. CUASI-CRISTALES: SIMETRIAS PROHIBIDAS

Entre los numerosos problemas físicos, químicos, biológicos y ecológicos en que aparecen los integrantes de la familia de números metálicos, uno de los más notables es el de la estructura de un cuasi-cristal. Las más simétricas, regulares y periódicas de todas las entidades reales, son los ***"cristales".*** En el otro extremo están las sustancias desordenadas o amorfas, como los ***"vidrios".*** ¿Cómo distinguimos un cristal de un vidrio? La respuesta es simple: un cristal físico real puede modelizarse colocando un átomo o una molécula en el vértice de un reticulado triangular, cuadrangular o hexagonal regular que poseen simetría de orden 3, 4 y 6, respectivamente. De este modo, el problema de la estructura de la materia se reduce a uno de <u>geometría pura</u>. Este era el esquema hasta que en 1984, Schechtman et al. [15], [16], registrando esquemas de difracción de electrones en una aleación de Aluminio y Manganeso rápidamente enfriada, encontraron al cortar con planos en determinados ángulos, simetrías pentagonales de orden 5, totalmente imposibles en un cristal ya que <u>no</u> es, obviamente, factible teselar el plano con pentágonos regulares. A estas configuraciones, que poseen una estructura espacial cuasi-periódica, se las denominó ***"cuasi-cristales".*** Y son, en realidad, un nuevo estado sólido de la materia!

Lo realmente interesante es que las proyecciones se efectuaban tomando un plano que formaba un ángulo con la horizontal igual al Número de Oro φ.

A partir de este descubrimiento, fueron apareciendo otros cuasi-cristales con otras simetrías prohibidas. Por ejemplo, el Número de Plata $\sigma_{Ag} = 1 + \sqrt{2} = [\,\overline{2}\,]$, genera un cuasi-cristal con la simetría prohibida de orden 8 (ver [17], [18]), mientras que el número $[\,\overline{4}\,]$ aparece en otra simetría también prohibida, de orden 12 (ver [19]). Ambas simetrías, cabe remarcarlo, han sido detectadas experimentalmente.

En particular, Gumbs y Ali en una sucesión de trabajos sumamente interesantes, [20], construyeron modelos geométricos uni-dimensionales de otros cuasi-cristales, construidos en base a sucesiones de Fibonacci generalizadas. Gumbs y Ali están interesados en estos cuasi-cristales por sus importantes aplicaciones físicas, entre ellas el problema de transmisión de luz a través de un medio multi-capa. Entre sus resultados experimentales más notables, es preciso mencionar que encontraron una diferencia sustancial entre el comportamiento de los números metálicos cuyo desarrollo en fracciones continuas es periódico puro (el Número de Oro, el Número de Plata y el Número de Bronce) y aquellos en los que es solo periódico (Número de Cobre y Número de Níquel).

REFERENCIAS

[1] Vera W. de Spinadel: "From the Golden Mean to Chaos". en preparación.

[2] J. Kappraff: Musical proportions at the basis of systems of architectural proportion both ancient and modern, NEXUS - Architecture and Mathematics. Ed.: Kim Williams, 1996.

[3] Vera W. de Spinadel: Orden y Caos, ***Anales Sociedad Científica Argentina***, 225, 1995.

[4] Vera W. de Spinadel: On the mathematical characterization of the onset to chaos, ***Chaos, Solitons & Fractals***, aceptado para su publicación.

[5] Vera W. de Spinadel: The family of Metallic Means, ***The Quarterly of the ISIS Symmetry***, aceptado para su publicación.

[6] P. H. Scholfield: The theory of proportion in Architecture, Cambridge Univ. Press, 1958.

[7] Leon Battista Alberti, The Ten books of Architecture, 1755 (reimpreso por Dover, 1986).

[8] Le Corbusier: Le Modulor, París, 1950 y Modulor 2, París, 1954.

[9] Vera W. de Spinadel: El Modulor de Le Corbusier, ***AREA***, Nro. 3, febrero 1996.

[10] D. J. Watts y Carol Watts: A Roman apartment complex, ***Scientific American***, 255, No.6, diciembre 1986.

[11] Kim Williams: The Sacred Cut revisited: the pavement of the baptistry of San Giovanni, Florence, ***The Mathematical Intelligencer,*** 16, No. 2, septiembre 1994.

[12] Kim Williams: Michelangelo's Medici Chapel: The cube, the square and the √ 2 rectangle, ***Leonardo***, en prensa.

[13] Ian Stewart: Las esculturas de St. George, ***Investigación y Ciencia***, julio 1996.

[14] Ian Stewart: Cuentos de un número desdeñado, Investigación y Ciencia, agosto 1996.

[15] L. Levin and P. J. Steinhardt, Quasicrystals: A New Class of Ordered Structures, ***Phys. Rev. Lett.*** 53, 1984.

[16] D. Schechtman, I. Blech, D. Gratias and J. W. Cahn, Metallic Phase with Long-Range Orientational Order and no Translational Symmetry, ***Phys. Rev. Lett.*** 53, 1984.

[17] T. Ichimasa et al., New ordered state between crystalline and amorphous in Ni-Cr particles, ***Phys. Rev. Lett.*** 55, 1985.

[18] Idem,***Phil. Mag.*** AJ8, 1988.

[19] H. Chen et al.: New Type of Two-dimensional Quasicrystal with 12fold Rotational Symmetry, ***Phys. Rev. Lett.,*** 60, 1988.

[20] G. Gumbs y M. K. Ali, Dynamical Maps, Cantor Spectra, and Localization for Fibonacci and Related Quasiperiodic Lattices, ***Phys. Rev. Lett.,*** 60, 1988.